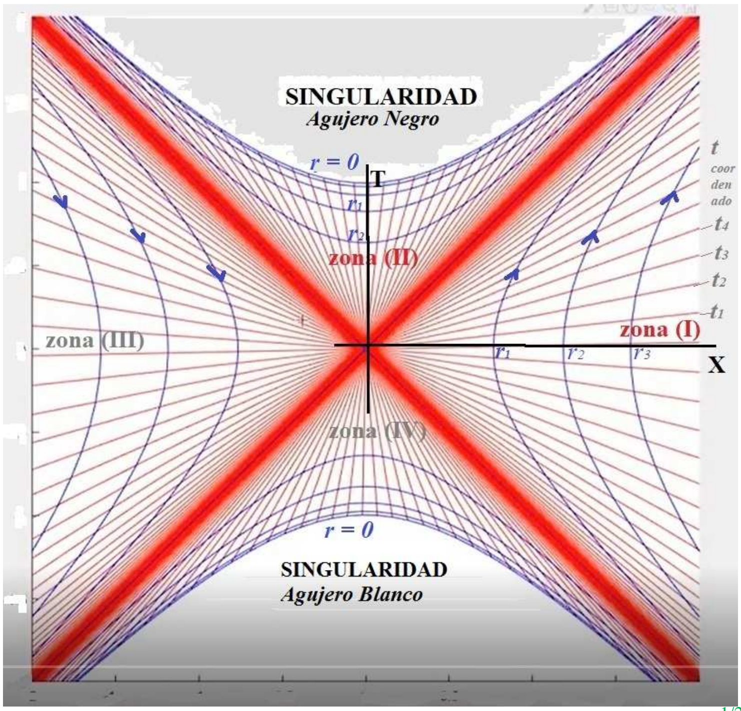
V-46 (1 h y 1 min) 1-Enero 2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Generalización coordenadas Kruskal a 4 zonas del Esp-Tmp** **Agujero gusano: Puente de Einstein-Rosen**

Generalizamos el resultado visto en video 45 para la zona II (dentro de Horizonte) a la zona I (fuera del Horizonte). Sin hacer aproximaciones Kruscal-Szekeres cambian de coordenadas para obtener métrica conformemente plana en toda la zona.
Ya puestos, también generalizamos y extendemos coordenadas a otras zonas: III y IV del espacio-tiempo, simplemente cambiando el signo. En un agujero negro sólo existen zona I (fuera horizonte eventos) y zona II (dentro horizonte eventos), las otras son artificios matemáticos ¿existen realmente? :



Zona (I) fuera de H.Ev: $u = e^{\frac{r}{2}} \cdot \sqrt{r-1}$

$$T = e^{r/2}\sqrt{r-1} \cdot \sinh(t/2)$$

$$X = e^{r/2}\sqrt{r-1} \cdot \cosh(t/2)$$

Zona (II) dentro de H.Ev (V-45) $u = e^{\frac{r}{2}}\sqrt{1-r}$

$$T = e^{r/2}\sqrt{1-r} \cdot \cosh(t/2)$$

$$X = e^{r/2}\sqrt{1-r} \cdot \sinh(t/2)$$

Zona (III) fuera de H.Ev:

$$T = -e^{r/2}\sqrt{r-1} \cdot \sinh(t/2)$$

$$X = -e^{r/2}\sqrt{r-1} \cdot \cosh(t/2)$$

Zona (IV) dentro H.Ev:

$$T = -e^{r/2}\sqrt{1-r} \cdot \cosh(t/2)$$

$$X = -e^{r/2}\sqrt{1-r} \cdot \sinh(t/2)$$

En las expresiones anteriores se omite el factor constante ($2e^{-1/2}$) que pusimos en video 45

Todas estas transformaciones reproducen la métrica (conformemente plana): en entorno infinitesimal de un valor determinado de $r = r_0$, obtenemos la métrica plana de Minkowski, por una constante distinta para cada valor de r:

$$\boxed{\boldsymbol{ds^2 = \frac{4}{r}e^{-r}\left(-dT^2 + dX^2\right) + r^2 d\Omega^2}}$$

$d\Omega^2$ es la parte angular de la métrica, igual que en Schwarzschild

La métrica anterior se puede comprobar que es válida en todas las zonas.. Para zona IV resulta evidente que si se cumple en zona II (V-45) también se cumplirá en la IV, pues al elevar al cuadrado dT y dX, resulta lo mismo si cambian de signo. Bastaría comprobar, pues, que se cumple en zona I (similar al v-45 para la zona II): hallamos diferenciales dT y dX y calculamos ($-dT^2+dX^2$), multiplicamos por $4e^{-r}/r$ y se puede reproducir la métrica de Schwarzschild.

También se comprueba (es fácil) que en las 4 zonas se cumple: $\boxed{X^2 - T^2 = (r-1)e^r}$

que permite determinar la coordenada r correspondiente a cada par de coordenadas (T, X) con la salvedad que cuando el valor de X es negativo (zona III) se obtiene un valor de r que sería válido también en zona I, y para romper esa ambigüedad hay que considerar los valores de ***t*** (*tiempo coordenado)* negativos en la zona III (crece hacía abajo: ver puntas de flecha en gráfico).

Matemáticamente funciona esta extensión de coordenadas a zonas III y IV del espacio-tiempo. Pero ¿existe ese universo paralelo? **Einstein y Rosen** propusieron, desde la métrica de Schwarzschild, un cambio de variable de *"r"* por *"u"* (inspirado en paraboloide de Flamm de video 34), de forma que su métrica abarque sólo las zonas (I) y (III), que serían los universos paralelos. Se estudia si se puede pasar de (I) a (III).

Métrica de Schwarzschild (adimensional): $ds^2 = -\left(1-\frac{1}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1-\frac{1}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2)$

Cambio Eienstein-Rosen: $\boldsymbol{r = 1 + \frac{u^2}{4}} \quad \rightarrow \quad u = \pm 2\sqrt{r-1}$

(**"*u*"** es una variable abstracta y **sólo existe para r ≥ 1**

Igual a cambio hecho cerca de H.ev por fuera tras aprox V-44 y se llega a Rindler.
Ahora no llegamos a Rindler pues no hacemos aprox

$dr = \frac{u}{2}du \quad \rightarrow \quad dr^2 = \frac{u^2}{4}du^2 \quad \Longrightarrow$ **Métrica Eintein-Rosen**: $\boxed{\boldsymbol{ds^2 = -\frac{u^2}{4+u^2}dt^2 + \frac{4+u^2}{4}du^2 + \left(1+\frac{u^2}{4}\right)^2 d\Omega^2}}$

Esta métrica rige solo para r ≥ 1, fuera del H.Ev (zonas I y III).

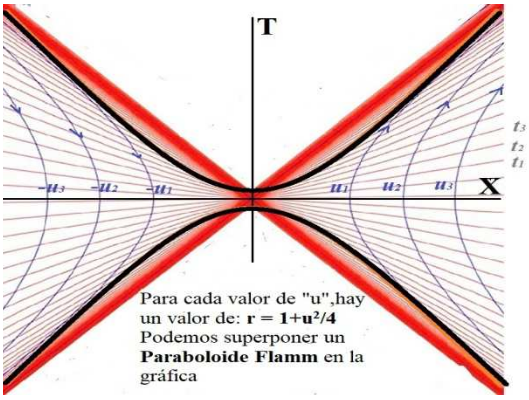
Hacemos cambio tipo Kruskal (aunque ahora "u" no es $u = e^{\frac{r}{2}} \cdot \sqrt{r-1}$)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= e^{r/2}\sqrt{r-1}\cdot\sinh(t/2) \;=\; \boldsymbol{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{u^2}{8}\right)} \cdot \frac{u}{2} \cdot \sinh(t/2)} \\ \boldsymbol{X} &= e^{r/2}\sqrt{r-1}\cdot\cosh(t/2) \;=\; \boldsymbol{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{u^2}{8}\right)} \cdot \frac{u}{2} \cdot \cosh(t/2)} \end{aligned}\right\}$$

Se cumple: $\boldsymbol{X^2 - T^2 = e^{\left(1+\frac{u^2}{4}\right)} \cdot \frac{u^2}{4}}$

t =cte → Rectas $\quad$ *T= ctgh·X*

u =cte → Hiperb $\quad T = \pm\sqrt{X^2 - f(u)}$



Si *u = 0* (r =1) → *T* = ±X (rectas de H.Ev)
Si *u > 0* (r >1) → Zona(I) (fuera H.Ev)
Consideramos Si *u < 0* (r > 1) → Zona(III) (fuera H.Ev Univ paralelo

Cambio Kruskal obtiene métrica conform. plana de la forma: $ds^2 = \frac{4}{r}e^{-r}(-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2$ (ver atrás)

Aventuramos que la métrica de Einstein-Rosen conduce a métrica conformemente plana de forma similar. La ponemos igual pero sustituyendo $r = 1 + \frac{u^2}{4}$. (En el video se demuestra matemáticamente que es así)

$$ds^2 = \frac{u^2}{4+u^2}dt^2 + \frac{4+u^2}{4}du^2 \;=\; \frac{4}{1+\frac{u^2}{4}}e^{-\left(1+\frac{u^2}{4}\right)}(-dT^2 + dX^2) \qquad \text{(No ponemos parte angular d}\Omega\text{)}$$

Siendo *"u"* la variable espacial en esta métrica (no confundir con $\underline{u}$ cudrivelocidad) vamos a calcular la velocidad espacial *v = du/dt* de una partícula cayendo por geodésica en movimiento radial (eliminamos dΩ):

$$ds^2 = -\frac{u^2}{4+u^2}dt^2 + \frac{4+u^2}{4}du^2 \;=\; -\boldsymbol{f}\cdot dt^2 + \boldsymbol{g}\cdot du^2 \qquad \text{(llamamos } \boldsymbol{f} \text{ y } \boldsymbol{g} \text{ para escribir menos)}$$

Sabemos que $ds^2 = -d\tau^2$ (tiempo propio en unidades adimensionales): $-d\tau^2 == -f\cdot dt^2 + g\cdot du^2$

Dividiendo por $d\tau^2$: $-1 = -f\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g\cdot\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = (regla\ cadena) = -f\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$

$$-1 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2(-f + gv^2) \;\rightarrow\; -\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -f + gv^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{f - \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2}{g}}$$

Calculamos $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}}$ a lo largo de geodésica utilizando Killing temporal (puede comprobarse $\underline{\xi}^{temp} = e_0$)

$m\underline{u}\cdot\underline{\xi}^{temp} = -\frac{E}{c}$ $\quad (elegimos\ E = 1;\ adimensional)$ $\quad \underline{u}\cdot\underline{\xi}^{temp} = -1 \;\rightarrow\; \frac{dx^\alpha}{d\tau}e_\alpha\cdot e_0 = -1$ (sobrevive α = 0)

$\frac{dx^0}{d\tau}e_0\cdot e_0 = -1 \;\Longrightarrow\; \frac{dt}{d\tau}g_{00} = \frac{dt}{d\tau}(-f) = -1 \;\Longrightarrow\; \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{f} \;\Longrightarrow\; \frac{d\tau}{dt} = f$ $\quad$ Se sustituye y queda:

$v = \sqrt{\frac{f - f^2}{g}} \;\Longrightarrow\; \boxed{v = \frac{4u}{(4+u^2)^{3/2}}}$ $\quad$ **Cuando llega a H.ev (u →0) ; v→0 (Obs Lejos no ve atravesar el H.Ev)**

Para Obs estático cercano, utilizamos "receta" con la métrica de Einstein-Rosen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Paso tiempo:} -(dt)^2_{est} = -f\cdot dt^2 \;\longrightarrow\; (dt)_{est} = \sqrt{f}\cdot dt \\ &\text{Distancia:}\ (du)^2_{est} = g\cdot du^2 \;\longrightarrow\; (du)_{est} = \sqrt{g}\cdot du \end{aligned}\right\} v = \frac{(du)_{est}}{(dt)_{est}} = \frac{\sqrt{g}\cdot du}{\sqrt{f}\cdot dt} = \sqrt{\frac{g}{f}}\,v_{lejano}$$

Sustituyendo: $\boxed{\boldsymbol{v = \frac{2}{\sqrt{4+u^2}}}}$

La velocidad vista por Obs. Estático cerca, cuando el objeto llega al Horizonte (u →0) resulta v → 1 que en coordenadas adimensionales es la velocidad de la luz, luego **no puede pasar por el puente (hueco del paraboloide de Flamm) al otro Universo**